

第1讲 一元二次方程基础加油站

一、一元二次方程的概念

练习1

1. ★★

下列是一元二次方程的是 () .

A. $2x^2 - \frac{3}{x} + 1 = 0$

B. $x^2 + y = 1$

C. $(x-1)^2 = 0$

D. $(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} + 1 = 0$

【答案】 C

【解析】 A 选项：本项中的方程不是整式方程，所以它不是一元二次方程，故 A 错误；

B 选项：本项中的方程含有两个未知数，所以它不是一元二次方程，故 B 错误；

C 选项：本项中的方程可化为 $x^2 - 2x + 1 = 0$ ，是整式方程，并且未知数的最高次数为 2，所以它是一元二次方程，故 C 正确；

D 选项：本项中的方程不是整式方程，所以它不是一元二次方程，故 D 错误。

故选 C。

【标注】 【知识点】 一元二次方程的定义

2. ★★

判断下列方程是不是一元二次方程。

(1) $2x^2 - kx - 1 = 0$ (k 为常数) .

(2) $\frac{4}{x^2 + 3} = 1$.

(3) $1 - x^2 = 0$.

(4) $5x^2 = 0$.

(5) $x^2 + y = 0$.

(6) $(x+3)^2 = (x-3)^2$.

(7) $mx^2 - 3x + 2 = 0$ (m 为常数) .

(8) $(a^2 + 1)x^2 + (2a - 1)x + 5 - a = 0$ (a 为常数) .

【答案】 (1) 是 .

(2) 不是 .

(3) 是 .

(4) 是 .

(5) 不是 .

(6) 不是 .

(7) 不是 .

(8) 是 .

【解析】(1) 是一元二次方程 .

(2) 不是 , 是分式方程 .

(3) 是一元二次方程 .

(4) 是一元二次方程 .

(5) 不是 , 是二元方程 .

(6) 不是 , 整理后是一元一次方程 .

(7) 不是 , 当 $m = 0$ 时 , 是一元一次方程 .

(8) 因为 $a^2 + 1 \neq 0$ 永远成立 , 所以无论 a 为何值 , 方程
 $(a^2 + 1)x^2 + (2a - 1)x + 5 - a = 0$ 都是一元二次方程 .

【标注】【知识点】一元二次方程的定义

练习2

3. 2017~2018学年江苏苏州工业园区苏州星海实验中学初三上学期期中模拟第11题3分 ★

已知关于 x 的方程 $(m - 1)x^{|m|+1} + (2m + 1)x - m = 0$ 是一元二次方程 , 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【解析】
$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ |m| + 1 = 2 \end{cases} ,$$
$$\begin{cases} m \neq 1 \\ m = \pm 1 \end{cases} ,$$
$$\therefore m = -1 .$$

【标注】【知识点】由一元二次方程定义求参数的值

4. ★

若方程 $(k^2 - 4)x^2 + (2 - 3k)x + (k - 2)y + 3k = 0$ 为二元一次方程 , 则 k 的值为 () .

A. 2

B. -2

C. 2或-2

D. 以上均不对

【答案】 B

【解析】由题可知不存在 x^2 项，故 $k^2 - 4 = 0$ ， $k = \pm 2$ ；又保留 y 项，故 $k - 2 \neq 0$ ，得 $k = -2$ 。

【标注】【知识点】由二元一次方程定义求参数的值

5. ★★

回答下列各题：

(1) 若一元二次方程 $(m-2)x^2 + 3(m^2+15)x + m^2 - 4 = 0$ 的常数项为零，则 m 的值为 _____。

(2) m 为何值时，关于 x 的方程 $(m - \sqrt{2})x^{m^2} - (m+3)x = 4m$ 是一元二次方程。

(3) 若 $x^{2a+b} - 3x^{a-b} + 1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，求 a 、 b 的值。

【答案】(1) -2

(2) $-\sqrt{2}$ 。

(3) $a = \frac{4}{3}$ ， $b = -\frac{2}{3}$ 或 $a = 1$ ， $b = 0$ 或 $a = 1$ ， $b = -1$ 。

【解析】(1) 由题意可知， $m^2 - 4 = 0$ ， $m - 2 \neq 0$ ，故 $m = -2$ 。

(2) 由定义可知， $m^2 = 2$ ， $\therefore m = \pm\sqrt{2}$ ，且 $m - \sqrt{2} \neq 0$ ， $\therefore m = -\sqrt{2}$ 。

(3) 分以下几种情况考虑：

① $2a + b = 2$ ， $a - b = 2$ ，此时 $a = \frac{4}{3}$ ， $b = -\frac{2}{3}$ ；

② $2a + b = 2$ ， $a - b = 1$ ，此时 $a = 1$ ， $b = 0$ ；

③ $2a + b = 1$ ， $a - b = 2$ ，此时 $a = 1$ ， $b = -1$ 。

【标注】【知识点】由一元二次方程定义求参数的值

练习3

6.

2019~2020学年10月江苏南京建邺区南京外国语学校河西分校初三上学期月考（南京外国语学校河西教育集团）第5题2分

★★

关于 x 的方程 $(x+m)^2 = n$ 的解是 $x_1 = -2$ ， $x_2 = 1$ （ m 、 n 为常数），则方程 $(x+m+3)^2 = n$ 的解是（ ）。

A. $x_1 = -2$ ， $x_2 = 1$

B. $x_1 = -1$ ， $x_2 = 2$

C. $x_1 = 1$ ， $x_2 = 4$

D. $x_1 = -5$ ， $x_2 = -2$

【答案】D

【解析】把 $(x+m+3)^2 = n$ 看作是 关于 $x+3$ 的方程，

而 $(x+m)^2 = n$ 的解是 $x_1 = -2$ ， $x_2 = 1$ ，

$$\therefore x+3=-2 \text{ 或 } x+3=1,$$

$$\therefore x_1=-5, x_2=-2,$$

故选 D.

【标注】【知识点】换元法求一元二次方程的根

7. 2018~2019学年5月江苏南京鼓楼区南京师范大学附属中学树人学校初二下学期月考第5题2分

★★★

关于 x 的方程 $a(x+m)^2+b=0$ 的解是 $x_1=-2, x_2=1$ (a, m, b 均为常数, $a \neq 0$), 则方程 $a(x+m+1)^2+b=0$ 的解是 ().

A. $x_1=-3, x_2=0$

B. $x_1=0, x_2=3$

C. $x_1=-4, x_2=-1$

D. $x_1=1, x_2=4$

【答案】A

【解析】把方程 $a(x+m+1)^2+b=0$ 看作关于 $x+1$ 的一元二次方程,

而关于 x 的方程 $a(x+m)^2+b=0$ 的解是 $x_1=-2, x_2=1$,

所以 $x+1=-2, x+1=1$,

所以 $x_1=-3, x_2=0$.

故选 A.

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

8. 2018~2019学年天津和平区初三上学期期中第11题2分 ★★★

关于 x 的方程 $a(x+m)^2+b=0$ 的解是 $x_1=-2, x_2=1$ (a, m, b 均为常数, $a \neq 0$), 则方程 $a(x+m+2)^2+b=0$ 的解是 ().

A. $x_1=0, x_2=3$

B. $x_1=-4, x_2=-1$

C. $x_1=-4, x_2=2$

D. $x_1=4, x_2=1$

【答案】B

【解析】 $\because$ 关于 x 的方程 $a(x+m)^2+b=0$ 的解是 $x_1=-2, x_2=1$, (a, m, b 均为常数, $a \neq 0$),

$\therefore$ 把 $x+2$ 当做第一个方程中的 x , 则方程 $a(x+m+2)^2+b=0$ 可变形为

$$a[(x+2)+m]^2+b=0$$

则 $x+2=-2$ 或 $x+2=1$,

解得 $x_1=-2-2=-4, x_2=1-2=-1$.

$\therefore$ 方程 $a(x+m+2)^2+b=0$ 的解是 $x_1=-4, x_2=-1$.

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

练习4

9. 2015~2016学年江苏苏州高新区初三上学期期中第14题3分 ★★

若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + 5 = 0 (a \neq 0)$ 的一个解是 $x = 1$ ，则 $2015 - a - b$ 的值是 _____ .

【答案】 2020

【解析】 ∵ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + 5 = 0 (a \neq 0)$ 的解是 $x = 1$ ，

∴ $a + b + 5 = 0$ ，则 $a + b = -5$ ，

∴ $2015 - (a + b) = 2015 - (-5) = 2015 + 5 = 2020$.

故答案为：2020 .

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

10. 2018~2019学年10月天津和平区天津市第二南开中学初三上学期月考第4题3分 ★★

已知关于 x 的一元二次方程 $(m + 3)x^2 + 5x + m^2 - 9 = 0$ 有一个解是 0，则 m 的值为 () .

A. -3

B. 3

C. +3

D. 不确定

【答案】 B

【解析】 把 $x = 0$ 代入，

$$m^2 - 9 = 0，$$

$$m = \pm 3，$$

而 $m + 3 \neq 0$ ，

$$m \neq -3，$$

$$\therefore m = 3 .$$

故选：B .

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

11. ★★

已知实数 a 、 b 、 c 满足 $4a + 2b + c = 0$ ，那么关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 一定有根 () .

A. $x = 2$

B. $x = -2$

C. $x = \pm 2$

D. 都不对

【答案】 A

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

12. 2017~2018学年江苏镇江丹阳市丹阳市第三中学初三上学期期中第5题2分 ★★

已知 $x = -1$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx - 10 = 0$ 的一个解，且 $a \neq -b$ ，则 $\frac{a^2 - b^2}{2a + 2b}$ 的值为 _____ .

【答案】 5

【解析】 $\because x = -1$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx - 10 = 0$ 的一个解，

$$\therefore a - b - 10 = 0 ,$$

$$\therefore a - b = 10 ,$$

$$\therefore a \neq -b ,$$

$$\therefore a + b \neq 0 ,$$

$$\therefore \frac{a^2 - b^2}{2a + 2b} = \frac{(a + b)(a - b)}{2(a + b)} = \frac{a - b}{2} = \frac{10}{2} = 5 ,$$

故答案是：5 .

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

13. 2015年四川成都邛崃市初三中考一模第21题4分 ★★★

已知 m 是方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的一个实数根，求代数式 $(m^2 - m) \left(m - \frac{2}{m} + 1 \right)$ 的值为 _____ .

【答案】 4

【解析】 $\because m$ 是方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的根，

$$\therefore m^2 - m - 2 = 0 ,$$

$$\therefore m^2 - 2 = m ,$$

$$m^2 - m = 2 ,$$

$$\therefore \text{原式} = (m^2 - m) \left(\frac{m^2 - 2}{m} + 1 \right)$$

$$= 2 \times \left(\frac{m}{m} + 1 \right) = 4 .$$

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

练习5

14.

2020~2021学年山东青岛市南区青岛大学附属中学初三上学期单元测试《一元二次方程》第4题3分

★★

根据下列表格对应值：

x	3.23	3.24	3.25	3.26

$ax^2 + bx + c$	-0.04	-0.02	0.01	0.03
-----------------	-------	-------	------	------

则关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的一个解 x 的范围是 () .

- A. $x < 3.24$ B. $3.24 < x < 3.25$ C. $3.25 < x < 3.26$ D. $3.25 < x < 3.28$

【答案】 B

【解析】 $\because x = 3.24$ 时, $ax^2 + bx + c = -0.02$;

$x = 3.25$ 时, $ax^2 + bx + c = 0.01$,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的一个解 x 的范围是 $3.24 < x < 3.25$.

故选 B .

【标注】【知识点】一元二次方程的根

15. 2020~2021学年山东德州夏津县初三上学期期中第6题4分 ★★

根据表格对应值：

x	1.1	1.2	1.3	1.4
$ax^2 + bx + c$	-0.59	0.84	2.29	3.76

判断关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个解 x 的取值范围是 () .

- A. $1.1 < x < 1.2$ B. $1.2 < x < 1.3$ C. $1.3 < x < 1.4$ D. 无法判定

【答案】 A

【解析】 由表可以看出, 当 x 取 1.1 与 1.2 之间的某个数时, $y = 0$, 即这个数是 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根 .

$ax^2 + bx + c = 0$ 的一个解 x 的取值范围为 $1.1 < x < 1.2$.

故选 A .

【标注】【知识点】估算一元二次方程的近似解

16. 2020~2021学年广东广州越秀区广州市执信中学初三上学期期中第4题3分 ★★

根据下列表格的对应值, 判断关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0, a, b, c \text{ 为常数})$ 的一个解 x 的取值范围是 () .

x	3.23	3.24	3.25	3.26
$ax^2 + bx + c$	-0.06	-0.02	0.03	0.09

- A. $3 < x < 3.23$ B. $3.23 < x < 3.24$ C. $3.24 < x < 3.25$ D. $3.25 < x < 3.26$

【答案】 C

【解析】 $\because x = 3.24, ax^2 + bx + c = -0.02, x = 3.25, ax^2 + bx + c = 0.03,$

$\therefore 3.24 < x < 3.25$ 时, $ax^2 + bx + c = 0,$

即方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0, a, b, c$ 为常数) 的一个解 x 的范围是 $3.24 < x < 3.25$

故选 C.

【标注】【知识点】估算一元二次方程的近似解

二、一元二次方程的解法

练习6

17. 2016~2017学年广东广州荔湾区初一下学期期中四校联考第18题4分 ★★

解方程: $(2x - 1)^2 = 25.$

【答案】 $x = 3$ 或 $x = -2.$

【解析】 $(2x - 1)^2 = 25,$

$$2x - 1 = \pm 5.$$

$$\textcircled{1} 2x - 1 = 5$$

$$2x = 6,$$

$$x = 3.$$

$$\textcircled{2} 2x - 1 = -5,$$

$$2x = -4,$$

$$x = -2.$$

$$\therefore x = 3 \text{ 或 } x = -2.$$

【标注】【知识点】直接开平方法求一元二次方程的根

18. 2019~2020学年贵州贵阳清镇市贵州省清镇市卫城中学初三上学期期中第15题8分 ★★

用适当的方法解下列一元二次方程.

$$4(x - 1)^2 - 36 = 0.$$

【答案】 (1) $x_1 = 4, x_2 = -2.$

【解析】 (1) $4(x - 1)^2 - 36 = 0$

$$4(x - 1)^2 = 36$$

$$(x-1)^2 = 9$$

$$x-1 = \pm 3,$$

$$x_1 = 4, x_2 = -2.$$

【标注】【知识点】配方法求一元二次方程的根

【知识点】直接开平方法求一元二次方程的根

19. ★★

用直接开平方法解关于 x 的方程 .

(1) $x^2 = 4$.

(2) $2x^2 - 6 = 0$.

(3) $(x-3)^2 = 8$.

(4) $4(x-1)^2 = 9$.

(5) $(2x-1)^2 = (3x-4)^2$.

(6) $4(2x-5)^2 = 9(3x-1)^2$.

【答案】(1) $x_1 = 2, x_2 = -2$.

(2) $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$.

(3) $x_1 = 2\sqrt{2} + 3, x_2 = -2\sqrt{2} + 3$.

(4) $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$.

(5) $x_1 = 3, x_2 = 1$.

(6) $x_1 = -\frac{7}{5}, x_2 = 1$.

【解析】(1) $x_1 = 2, x_2 = -2$.

(2) $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$.

(3) $x_1 = 2\sqrt{2} + 3, x_2 = -2\sqrt{2} + 3$.

(4) $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$.

(5) $x_1 = 3, x_2 = 1$.

(6) $x_1 = -\frac{7}{5}, x_2 = 1$.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】直接开平方法求一元二次方程的根

练习7

20. 2018~2019学年10月山西长治潞州区长治黄冈实验学校(北校区)初三上学期月考第4题3分 ★★

用配方法解方程 $3x^2 - 6x + 1 = 0$, 则方程可变形为 () .

A. $(x-3)^2 = \frac{1}{3}$ B. $3(x-1)^2 = \frac{1}{3}$ C. $(3x-1)^2 = 1$ D. $(x-1)^2 = \frac{2}{3}$

【答案】 D

【解析】 原方程为 $3x^2 - 6x + 1 = 0$ ，二次项系数化为 1，得 $x^2 - 2x = -\frac{1}{3}$ ，

即 $x^2 - 2x + 1 = -\frac{1}{3} + 1$ ，所以 $(x-1)^2 = \frac{2}{3}$ 。

故选 D。

【标注】 【知识点】 配方法解一元二次方程的一般步骤

21. 2019~2020学年吉林白山长白县初三上学期期末第15题5分 ★★

解方程： $2x^2 - 4x - 1 = 0$ （配方法）。

【答案】 $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ ， $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

【解析】 $2x^2 - 4x - 1 = 0$ 。

$$2(x^2 - 2x) = 1。$$

$$2(x^2 - 2x + 1 - 1) = 1。$$

$$2(x-1)^2 = 3。$$

$$x-1 = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}。$$

$$x = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}。$$

$$\therefore x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}。$$

【标注】 【能力】 运算能力

【知识点】 配方法求一元二次方程的根

22. 2018~2019学年上海松江区初二上学期期中 ★★★

用配方法解方程： $3x^2 - 5x - 2 = 0$ 。

【答案】 见解析

【解析】 解： $x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{2}{3}$ ，

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{2}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2，$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{49}{36}，$$

$$x - \frac{5}{6} = \frac{7}{6} \text{ 或 } x - \frac{5}{6} = -\frac{7}{6}，$$

$$x = 2 \text{ 或 } x = -\frac{1}{3}，$$

∴原方程的解是 $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{3}$.

【标注】【知识点】配方法求一元二次方程的根

23. 2017~2018学年10月四川成都金牛区成都七中万达学校初三上学期月考第15.2题6分 ★★

解方程： $\frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0$.

【答案】 $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

【解析】 $\frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x = 2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2 + 1$$

$$(x - 1)^2 = 3$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{3}$$

$$\therefore x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 1 - \sqrt{3} .$$

【标注】【知识点】配方法求一元二次方程的根

练习8

24. 2017~2018学年四川成都金牛区西南交通大学附属中学初三上学期期中第15.2题 ★★

解方程： $5x^2 - 8x + 2 = 0$ (公式法) .

【答案】 $x_1 = \frac{4 + \sqrt{6}}{5}$, $x_2 = \frac{4 - \sqrt{6}}{5}$.

【解析】 $a = 5$, $b = -8$, $c = 2$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 5 \times 2 = 24 ,$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm 2\sqrt{6}}{10} = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{5} ,$$

$$\therefore \text{方程的解为: } x_1 = \frac{4 + \sqrt{6}}{5} , x_2 = \frac{4 - \sqrt{6}}{5} .$$

【标注】【知识点】公式法求一元二次方程的根

25. 2013~2014学年北京房山区初二下学期期末第13题10分 ★★

用指定的方法解下列方程：

$2x^2 - 8x + 3 = 0$ (用公式法) .

【答案】 (1) $x_1 = \frac{4 + \sqrt{10}}{2}$, $x_2 = \frac{4 - \sqrt{10}}{2}$.

【解析】(1) $\because a = 2, b = -8, c = 3,$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 40$$

$$\therefore x = \frac{8 \pm \sqrt{40}}{2 \times 2} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{4 + \sqrt{10}}{2}, x_2 = \frac{4 - \sqrt{10}}{2}.$$

【标注】【知识点】公式法求一元二次方程的根

26. 2013~2014学年北京海淀区人大附中初二下学期期末第24题6分 ★★

解方程：

$$2x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ (公式法)}.$$

【答案】(1) $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}.$

【解析】(1) $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 12,$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2 \times 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以 } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}.$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

27. 2014~2015学年山东青岛李沧区初三上学期期中第16题 ★★

解一元二次方程：

(1) $2x^2 - 9x + 8 = 0$ (公式法) .

(2) $(x+8)(x+1) = -12.$

【答案】(1) $x_1 = \frac{9 + \sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{9 - \sqrt{17}}{4}.$

(2) $x_1 = -4, x_2 = -5.$

【解析】(1) $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 17,$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{4},$$

$$\text{所以 } x_1 = \frac{9 + \sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{9 - \sqrt{17}}{4}.$$

(2) $x^2 + 9x + 20 = 0,$

$$(x+4)(x+5) = 0,$$

$$x+4=0 \text{ 或 } x+5=0,$$

$$\text{所以 } x_1 = -4, x_2 = -5.$$

【标注】【能力】运算能力

【方法】配方法

【知识点】配方法求一元二次方程的根

【知识点】公式法求一元二次方程的根

【知识点】公式法解一元二次方程的一般步骤

【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

28. 2014~2015学年广东广州番禺区初三上学期期末第17题6分 ★★

解答下列问题：

(1) 用配方法解方程： $x^2 - 8x + 1 = 0$.

(2) 用公式法解方程： $5x^2 - 3x = x + 1$.

【答案】(1) $x_1 = 4 + \sqrt{15}$, $x_2 = 4 - \sqrt{15}$.

(2) $x_1 = -\frac{1}{5}$, $x_2 = 1$.

【解析】(1) $x^2 - 8x + 1 = 0$,

移项, 得 $x^2 - 8x = -1$,

配方, 得 $x^2 - 8x + 4^2 = -1 + 4^2$,

即 $(x - 4)^2 = 15$,

$\therefore x - 4 = \pm\sqrt{15}$,

得 $x_1 = 4 + \sqrt{15}$, $x_2 = 4 - \sqrt{15}$.

(2) $5x^2 - 3x = x + 1$,

方程化为 $5x^2 - 4x - 1 = 0$,

$a = 5$, $b = -4$, $c = -1$,

$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 5 \times (-1)$

$= 36$,

$x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{10}$,

$x_1 = -\frac{1}{5}$, $x_2 = 1$.

【标注】【知识点】公式法求一元二次方程的根

练习9

29. 2020~2021学年天津河北区初三上学期期中第19题5分 ★★

解方程： $x^2 + 10x + 16 = 0$.

【答案】 $x_1 = -2$, $x_2 = -8$.

【解析】 $(x + 2)(x + 8) = 0$,

$$x_1 = -2, x_2 = -8.$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

30. 2019~2020学年天津河西区天津市培杰中学初三上学期期末第19题8分 ★★

解方程： $x^2 - 7x - 30 = 0$.

【答案】 $x_1 = 10, x_2 = -3$.

【解析】 $x^2 - 7x - 30 = 0$

$$(x - 10)(x + 3) = 0$$

$$x - 10 = 0 \text{ 或 } x + 3 = 0,$$

$$x_1 = 10, x_2 = -3.$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

31. 2020~2021学年天津滨海新区初三上学期期末第19题8分 ★★

解方程： $x^2 + 4x + 8 = 2x + 11$.

【答案】 $x_1 = -3, x_2 = 1$.

【解析】 $x^2 + 4x + 8 = 2x + 11,$

$$x^2 + 2x - 3 = 0,$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0,$$

$$x + 3 = 0, x - 1 = 0,$$

$$x_1 = -3, x_2 = 1.$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

32. 2020~2021学年天津红桥区初三上学期期末第20题8分 ★★

解下列关于 x 的方程.

(1) $x(x + 1) = 3x + 3$.

(2) $5x^2 - 3x = x + 1$.

【答案】 (1) $x_1 = -1, x_2 = 3$.

(2) $x_1 = 1, x_2 = -0.2$.

【解析】 (1) $\because x(x + 1) = 3x + 3,$

$$\therefore x(x + 1) - 3(x + 1) = 0,$$

$$\text{则 } (x+1)(x-3)=0,$$

$$\therefore x+1=0 \text{ 或 } x-3=0,$$

$$\text{解得 } x_1=-1, x_2=3.$$

$$(2) \text{ 整理, 得: } 5x^2-4x-1=0,$$

$$\therefore (x-1)(5x+1)=0,$$

$$\text{则 } x-1=0 \text{ 或 } 5x+1=0,$$

$$\text{解得 } x_1=1, x_2=-0.2.$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

33. 2019~2020学年天津河东区天津市育才中学初三上学期期中第19题8分 ★★

解方程.

$$(1) 4x^2-3x-5=x-2.$$

$$(2) (2x+1)^2+4(2x+1)+3=0.$$

【答案】(1) $x_1=\frac{3}{2}, x_2=-\frac{1}{2}.$

$$(2) x_1=-1, x_2=-2.$$

【解析】(1) $4x^2-3x-5=x-2,$

$$4x^2-4x-3=0,$$

$$(2x-3)(2x+1)=0,$$

$$x_1=\frac{3}{2}, x_2=-\frac{1}{2}.$$

$$(2) (2x+1)^2+4(2x+1)+3=0,$$

$$(2x+1+1)(2x+1+3)=0,$$

$$(2x+2)(2x+4)=0,$$

$$x_1=-1, x_2=-2.$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

三、一元二次方程的判别式

练习10

34. ★★

方程 $x^2-3x=4$ 根的判别式的值是 ().

A. -7

B. 25

C. ± 5

D. 5

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

下列一元二次方程有两个相等的实数根的是 ().

A. $-x^2 - 3x + 1 = 0$ B. $2x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{1}{4} = 0$ C. $4x^2 + 5 = 4\sqrt{5}x$ D. $3x^2 - 12x + 9 = 0$

【解析】一元二次方程有两个相等的实数根则判别式 $= 0$, $\Delta_1 = 9 + 4 = 13$,

$$\Delta_2 = \frac{49}{4} - 4 \times 2 \times \frac{1}{4} = \frac{41}{4}$$

$$\Delta_3 = 80 - 80 = 0,$$

$$\Delta_4 = 144 - 4 \times 3 \times 9 = 36.$$

故选 C.

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

36. 2013年山东潍坊中考真题第10题3分 ★★★

已知关于 x 的方程 $kx^2 + (1-k)x - 1 = 0$ ，下列说法正确的是（ ）.

A. 当 $k=0$ 时, 方程无解

B. 当 $k = 1$ 时, 方程有一个实数根

C. 当 $k = -1$ 时, 方程有两个相等的实数根

D. 当 $k \neq 0$ 时, 方程总有两个不相等的实数根

【解析】关于于 x 的方程 $kx^2 + (1-k)x - 1 = 0$,

A、当 $k=0$ 时, $x-1=0$, 则 $x=1$, 故此选项错误.

B、当 $k=1$ 时, $x^2-1=0$ 方程有两个实数根, 故此选项错误.

C、当 $k = -1$ 时， $-x^2 + 2x - 1 = 0$ ，则 $(x - 1)^2 = 0$ ，此时方程有两个相等的实数根，故此选项正确。

D、由 C 得此选项错误。

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

若关于 x 的一元二次方程 $(a-5)x^2-4x-1=0$ 有实数根, 则 a 的取值范围是 ().

A. $a \geq 1$

B. $a \neq 5$

C. $a > 1$ 且 $a \neq 5$

D. $a \geq 1$ 且 $a \neq 5$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(a-5)x^2 - 4x - 1 = 0$ 有实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac \geq 0,$$

$$\text{即：} (-4)^2 - 4 \times (a-5) \times (-1) = 4a - 4 \geq 0,$$

$$\text{解得：} a \geq 1,$$

$\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(a-5)x^2 - 4x - 1 = 0$ 中 $a-5 \neq 0$ ，

$$\therefore a \geq 1 \text{ 且 } a \neq 5.$$

【标注】 【知识点】 由一元二次方程根的情况确定参数

38. 2018~2019学年3月浙江嘉兴秀洲区秀洲现代实验学校初二下学期月考第6题3分 ★★

若关于 x 的方程 $mx^2 - mx + 2 = 0$ 有两个相等的实数根，则 m 的值为 () .

A. 0

B. 8

C. 4或8

D. 0或8

【答案】 B

【解析】 由题意知： $\Delta = b^2 - 4ac = (-m)^2 - 4 \times m \times 2 = 0$ ，且 $m \neq 0$ ，所以 $m = 8$.

【标注】 【知识点】 由一元二次方程根的情况确定参数

39. 2018年河南周口商水县初三中考一模第12题3分 ★★

若关于 x 的方程 $(k-1)x^2 + 2x - 2 = 0$ 有实数根，则实数 k 的取值范围是 _____ .

【答案】 $k \geq \frac{1}{2}$

【标注】 【知识点】 由一元二次方程根的情况确定参数

40. 2019~2020学年湖南长沙开福区青竹湖湘一外国语学校初二下学期期中第12题3分 ★★

若关于 x 的方程 $(k-2)x^2 + 2x - 1 = 0$ 有实数根，则实数 k 的取值范围是 () .

A. $k \geq 1$

B. $k > 1$ 且 $k \neq 2$

C. $k \leq 1$

D. $k \geq 1$ 且 $k \neq 2$

【答案】 A

【解析】 当该方程为一元二次方程时，有实数根，

$$\begin{cases} k-2 \neq 0 \\ \Delta = 2^2 - 4(k-2) \cdot (-1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore k \geq 1 \text{ 且 } k \neq 2,$$

当该方程为一元一次方程时，必有实数根，

则 $k - 2 = 0$, $k = 2$,

综上 , k 的取值范围为 $k \geq 1$.

故选 A .

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

练习12

41. 2019~2020学年10月天津和平区天津市第二十一中学初三上学期月考第20题 ★★★

已知关于 x 的一元二次方程 $(x - 3)(x - 2) = m^2$.

(1) 求证 : 对于任意实数 m , 方程总有两个不相等的实数根 .

(2) 若方程的一个根是 1 , 求 m 的值及方程的另一个根 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $m = \pm\sqrt{2}$, 方程的另一个根为 4 .

【解析】 (1) $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(x - 3)(x - 2) = m^2$,

$$\therefore x^2 - 5x + 6 - m^2 = 0 ,$$

$$\therefore \Delta = 25 - 4(6 - m^2) = 1 + 4m^2 > 0 ,$$

$\therefore$ 对于任意实数 m , 方程总有两个不相等的实数根 .

(2) 若方程的一个根是 1 ,

$$\text{则 } (1 - 3) \times (1 - 2) = m^2 ,$$

$$2 = m^2 ,$$

$$m = \pm\sqrt{2} ,$$

原方程变形为 $x^2 - 5x + 4 = 0$,

设方程的另一个根为 a ,

$$\text{则 } 1 \times a = 4 ,$$

$$a = 4 ,$$

则方程的另一个根为 4 .

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

42. 2017~2018学年山东淄博周村区初三下学期期中 (五四学制) 第22题8分 ★★★

已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - (m + 2)x + 2 = 0$.

(1) 证明 : 不论 m 为何值时 , 方程总有实数根 .

(2) m 为何整数时 , 方程有两个不相等的正整数根 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $m = 1$.

【解析】 (1) $\Delta = (m+2)^2 - 8m = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$,

$\therefore$ 不论 m 为何值时 , $(m-2)^2 \geq 0$ 恒成立 ,

$\therefore \Delta \geq 0$ 恒成立 ,

$\therefore$ 方程总有实数根 .

(2) 解方程得 , $x = \frac{m+2 \pm (m-2)}{2m}$,

$$x_1 = \frac{2}{m} , x_2 = 1 ,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的正整数根 ,

$\therefore m = 1$ 或 2 , $m = 2$ 不合题意 ,

$\therefore m = 1$.

【标注】 【知识点】一元二次方程根的判别式

43. 2019~2020学年天津南开区初三上学期期中第19题8分 ★★★

已知 , 关于 x 的方程 $2x^2 - mx + n = 0$.

(1) 当 $m - n = 4$ 时 , 判断方程根的情况 .

(2) 若方程有两个相等的实数根 , 当 $n = 2$ 时 , 求此时方程的根 .

【答案】 (1) 一元二次方程 $2x^2 - mx + n = 0$ 有两个不相等的根 .

(2) 1 或 -1 .

【解析】 (1) $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= (-m)^2 - 4 \times 2 \times n$$

$$= m^2 - 8n ,$$

$$\therefore m - n = 4 ,$$

$$\therefore n = m - 4 ,$$

$$\Delta = m^2 - 8n$$

$$= m^2 - 8(m - 4)$$

$$= m^2 - 8m + 32$$

$$= (m - 4)^2 + 16 ,$$

$$\therefore (m - 4)^2 \geq 0 ,$$

$$\therefore (m - 4)^2 + 16 > 0 ,$$

$$\therefore \Delta > 0 ,$$

即关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - mx + n = 0$ 有两个不相等的根 .

(2) 方程 $2x^2 - mx + n = 0$ 有两个相等的根 ,

$$\Delta = m^2 - 8n = 0 ,$$

$$\therefore n = 2 ,$$

$$\therefore m^2 - 8 \times 2 = 0 ,$$

$$m^2 = 16 ,$$

$$m = \pm 4 ,$$

$$m_1 = 4 , m_2 = -4 .$$

$$\textcircled{1} m_1 = 4 , n = 2 \text{时} ,$$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0 ,$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 ,$$

$$(x - 1)^2 = 0 ,$$

$$x_1 = x_2 = 1 ;$$

$$\textcircled{2} m_1 = -4 , n = 2 \text{时} ,$$

$$2x^2 + 4x + 2 = 0 ,$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 ,$$

$$(x + 1)^2 = 0 ,$$

$$x_1 = x_2 = -1 .$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

44. 2017年甘肃白银景泰县景泰县第四中学初三中考二模第21题8分 ★★★

已知关于 x 的一元二次方程 $(a + c)x^2 + 2bx + (a - c) = 0$, 其中 a , b , c 分别为 $\triangle ABC$ 三边的长 .

(1) 如果 $x = -1$ 是方程的根 , 试判断 $\triangle ABC$ 的形状 , 并说明理由 .

(2) 如果方程有两个相等的实数根 , 试判断 $\triangle ABC$ 的形状 , 并说明理由 .

(3) 如果 $\triangle ABC$ 是等边三角形 , 试求这个一元二次方程的根 .

【答案】 (1) $\triangle ABC$ 是等腰三角形 .

(2) $\triangle ABC$ 是直角三角形 .

(3) $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

【解析】 (1) 当 $x = -1$ 时 , 方程为 $a + c - 2b + a - c = 0$, 整理得 $a = b$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形 .

(2) $\because$ 方程有两个相等的实数根 ,

$$\therefore \Delta = 4b^2 - 4(a + c)(a - c) ,$$

$$= 4b^2 - 4(a^2 - c^2) = 0 ,$$

$$\text{整理得 } a^2 = b^2 + c^2 ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形 .

(3) $\because \triangle ABC$ 是等边三角形 ,

$$\therefore a = b = c \neq 0 ,$$

$$\therefore \text{原方程为 } 2ax^2 + 2ax = 0 ,$$

$$\because a \neq 0 ,$$

$$\therefore x^2 + x = 0 ,$$

$$\text{解得 } x_1 = 0 , x_2 = -1 .$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

四、一元二次方程的根系关系

练习13

45. 2016年天津红桥区初三毕业考试第4题3分 ★★

已知一元二次方程 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两根分别为 x_1 , x_2 , 则 $x_1 \cdot x_2$ 的值为 () .

- A. -3 B. 1 C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】 D

【解析】 根据韦达定理有 : $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

46. 2018年四川成都金牛区初三中考一模第21题4分 ★★

已知 α , β 是方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的两个实数根 , 则 $\alpha + \beta - \alpha\beta$ 的值为 _____ .

【答案】 7

【解析】 由韦达定理可知 : $\alpha + \beta = -\frac{-3}{1} = 3$, $\alpha\beta = \frac{-4}{1} = -4$,
 $\therefore \alpha + \beta - \alpha\beta = 3 - (-4) = 7$.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

47. ★★★

设 x_1 、 x_2 是方程 $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 2 = 0$ 的两个实数根 , 且 $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 8$, 则 k 的值是 _____ .

【答案】 1

【解析】由题意得 $\Delta \geq 0$ ，解得 $k \geq \frac{1}{2}$ ，

$$\text{又韦达定理知，} \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(k+1) \\ x_1 x_2 = k^2 + 2 \end{cases},$$

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 8, \quad x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 8,$$

$$\text{即有 } 2k + 2 + k^2 + 2 + 1 = 8$$

$$\text{解得 } k_1 = 1, \quad k_2 = -3 \text{ (舍)}.$$

$$\text{故 } k = 1.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

48. 2019~2020学年河北石家庄新乐市初三上学期期中第11题2分 ★★

已知一元二次方程： $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两个根分别是 x_1 、 x_2 ，则 $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ 的值为（ ）。

A. -3

B. 3

C. -6

D. 6

【答案】A

【解析】∵一元二次方程： $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两个根分别是 x_1 、 x_2 ，

$$\therefore x_1 + x_2 = 3, \quad x_1 x_2 = -1,$$

$$\therefore x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -1 \times 3 = -3.$$

故选：A。

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

练习14

49. 2015~2016学年陕西西安雁塔区陕西师范大学附属中学初三上学期期中第13题3分 ★★★

若 α ， β 是方程 $x^2 + 2x - 2015 = 0$ 的两个实数根，则 $\alpha^2 + 3\alpha + \beta$ 的值为 _____。

【答案】2013

【解析】∵ α 是方程 $x^2 + 2x - 2015 = 0$ 的根，

$$\therefore \alpha^2 + 2\alpha - 2015 = 0,$$

$$\therefore \alpha^2 + 2\alpha = 2015,$$

$$\therefore \alpha^2 + 3\alpha + \beta = 2015 + \alpha + \beta,$$

∵ α 、 β 是方程 $x^2 + 2x - 2015 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore \alpha + \beta = -2,$$

$$\therefore \alpha^2 + 3\alpha + \beta = 2015 - 2 = 2013.$$

故答案为：2013。

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

50. 2019~2020学年10月天津武清区天津市杨村第八中学初三上学期月考第22题10分 ★★

已知一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$.

(1) 若方程有两个实数根 , 求 m 的取值范围 .

(2) 若方程有两个实数根为 x_1 , x_2 , 且 $x_1 + 3x_2 = 3$, 求 m 的值 .

【答案】 (1) $m \leq 1$.

(2) $m = \frac{3}{4}$.

【解析】 (1) $\because$ 方程有两个实数根 ,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac \geq 0 ,$$

$$\text{即 } 4 - 4m \geq 0 ,$$

$$\Rightarrow m \leq 1 .$$

$$(2) \because x_1 + 3x_2 = 3 , x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2 ,$$

$$\text{即 } x_1 + x_2 + 2x_2 = 3 ,$$

$$\therefore x_2 = \frac{1}{2} ,$$

将 $x_2 = \frac{1}{2}$ 代入方程

$$\frac{1}{4} - 1 + m = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{4} ,$$

$$\therefore m = \frac{3}{4} .$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

|| 练习15

51. 2018年四川成都武侯区初三中考一模第22题4分 ★★★

已知 x_1 , x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 5x + a = 0$ 的两个实数根 , 且 $|x_1 - x_2| = \sqrt{5}$, 则 $a =$ _____ .

【答案】 5

【解析】 由两根关系得 $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 x_2 = a$,

$$(x_1 - x_2)^2 = |x_1 - x_2|^2 = 5 , (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 5 ,$$

$$\therefore a = 5 .$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

52. 2019~2020学年12月重庆渝北区重庆八中初三上学期周测D卷第8题4分 ★★

关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (k-1)x - k + 2 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 若 $(x_1 - x_2)^2 + 2x_1x_2 = 1$, 则 k 的值 () .

- A. 0或2 B. -2或2 C. -2 D. 2

【答案】 D

【解析】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (k-1)x - k + 2 = 0$ 有实数根,

$$\therefore \Delta = [-(k-1)]^2 - 4 \times 1 \times (-k+2) \geq 0,$$

$$\text{解得: } k \geq 2\sqrt{2} - 1 \text{ 或 } k \leq -2\sqrt{2} - 1,$$

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (k-1)x - k + 2 = 0$ 的两个实数根为 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = k - 1, \quad x_1x_2 = -k + 2.$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 + 2x_1x_2 = 1,$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1.$$

$$\therefore (k-1)^2 - 2(-k+2) = 1.$$

$$\therefore k^2 - 2k + 1 + 2k - 4 = 1.$$

$$\therefore k^2 = 4.$$

$$\therefore k_1 = 2, \quad k_2 = -2 \text{ (舍)}.$$

$$\therefore k \text{ 的值为 } 2.$$

故选 D.

【标注】 【知识点】一元二次方程根与系数的关系

53. 2018~2019学年广东广州越秀区广州大学附属中学初三上学期开学考试第16题3分 ★★★

若关于 x 的方程 $x^2 + 2mx + m^2 + 3m - 2 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 则 $x_1(x_2 + x_1) + x_2^2$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $\frac{5}{4}$

【解析】 关于 x 的方程 $x^2 + 2mx + m^2 + 3m - 2 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 ,

$$\Delta = 4m^2 - 4(m^2 + 3m - 2) \geq 0, \text{ 解得 } m \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{由韦达定理可知 } x_1 + x_2 = -2m, \quad x_1 \cdot x_2 = m^2 + 3m - 2.$$

$$x_1(x_2 + x_1) + x_2^2$$

$$= x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2$$

$$= (-2m)^2 - m^2 - 3m + 2$$

$$= 3m^2 - 3m + 2$$

$$= 3\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}.$$

$$\therefore m \leq \frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{1}{2} \text{ 时, 取得最小值为 } \frac{5}{4}.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

54. 2016~2017学年天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初三上学期期末第1题3分 ★

设关于 x 的方程 $2x^2 + kx + 2 = 0$ 的两根分别为 α 、 β ，且 $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ，则 k 等于 () .

- A. 2 B. -4 C. 4 D. -2

【答案】B

【解析】 $2x^2 + kx + 2 = 0$,
 $\alpha + \beta = -\frac{k}{2}$,
 $\alpha\beta = \frac{2}{2} = 1$,
 $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}$,
 $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$,
 $\frac{k^2}{4} - 2 = -\frac{k}{2}$,
 $k^2 + 2k - 8 = 0$,
 $k_1 = 2$, $k_2 = -4$,
 $\Delta = k^2 - 4 \times 2 \times 2 \geq 0$,
 $k^2 \geq 16$,
 $k = -4$.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

55. 2016~2017学年陕西西安碑林区西铁一中初三上学期开学考试第21题 ★★★

已知关于 x 的方程 $x^2 - 2(k-1)x + k^2 = 0$ 有两个实数根 x_1 , x_2 .

- (1) 求 k 的取值范围 .
 (2) 若 $|x_1 + x_2| = x_1x_2 - 1$, 求 k 的值 .

【答案】 (1) $k \leq \frac{1}{2}$.
 (2) $k_2 = -3$.

【解析】 (1) 由方程有两个实数根可得：

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(k-1)^2 - 4k^2 = -8k + 4 \geq 0 ,$$

解得 $k \leq \frac{1}{2}$.

(2) 由韦达定理得: $x_1 + x_2 = 2(k-1)$, $x_1 x_2 = k^2$,

由 (1) 得 , $k \leq \frac{1}{2}$,

$\therefore 2(k-1) < 0$, 即 $x_1 + x_2 < 0$,

$\therefore |x_1 + x_2| = x_1 x_2 - 1$,

即 $-(x_1 + x_2) = x_1 x_2 - 1$,

$\therefore -2(k-1) = k^2 - 1$,

解得 $k_1 = 1$ (舍弃) , $k_2 = -3$.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

56. 2019~2020学年10月江西南昌西湖区南昌市育新学校初三上学期月考第17题6分 ★★

已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m-3)x - m = 0$,

(1) 求证: 方程有两个不相等的实数根 .

(2) 如果方程的两实根为 x_1 、 x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7$, 求 m 的值 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 1 , 2 .

【解析】 (1) $\because \Delta = m^2 - 2m + 9 = (m-1)^2 + 8 > 0$,

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根 .

(2) $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7$ 变形可得 $(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 7$,

利用韦达定理代入可求得 $m_1 = 1$, $m_2 = 2$.

故答案为: 1 , 2 .

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

|| 练习16

57. 2017~2018学年10月广东广州越秀区广州大学附属中学初三上学期月考第21题12分 ★★★

已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2m+1)x + m^2 - 4 = 0$

(1) 当 m 为何值时, 方程有两个不相等的实数根?

(2) 若边长为 5 的菱形的两条对角线的长分别为方程两根的 2 倍, 求 m 的值 .

【答案】 (1) 当 $m > -\frac{17}{4}$ 时, 方程有两个不相等的实数根 .

(2) m 的值为 -4 .

【解析】 (1) $\because$ 方程 $x^2 + (2m+1)x + m^2 - 4 = 0$ 有两个不相等的实数根 ,

$$\therefore \Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 - 4) = 4m + 17 > 0,$$

$$\text{解得: } m > -\frac{17}{4}.$$

$\therefore$ 当 $m > -\frac{17}{4}$ 时, 方程有两个不相等的实数根.

(2) 设方程的两根分别为 a 、 b ,

$$\text{根据题意得: } a+b = -2m-1, ab = m^2 - 4.$$

$\therefore 2a$ 、 $2b$ 为边长为 5 的菱形的两条对角线的长,

$$\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (-2m-1)^2 - 2(m^2 - 4) = 2m^2 + 4m + 9 = 5^2 = 25,$$

$$\text{解得: } m = -4 \text{ 或 } m = 2.$$

$$\therefore a > 0, b > 0,$$

$$\therefore a+b = -2m-1 > 0,$$

$$\therefore m = -4.$$

若边长为 5 的菱形的两条对角线的长分别为方程两根的 2 倍, 则 m 的值为 -4 .

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

练习 17

58. ★★★★★

若两个不等实数 m 、 n 满足 $m^2 - 2m = a$, $n^2 - 2n = a$, $m^2 + n^2 = 5$, 则 $m - n$ 的值为 _____.

【答案】 $\pm\sqrt{6}$

【解析】 略.

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

59. ★★★★★

已知 a 、 b 满足 $a^2 - 2a - 1 = 0$, $b^2 - 2b - 1 = 0$, 且 $a \neq b$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1 =$ _____.

【答案】 -5

【解析】 $\therefore a$ 、 b 满足 $a^2 - 2a - 1 = 0$, $b^2 - 2b - 1 = 0$, 且 $a \neq b$,

$\therefore a$ 、 b 可以看作方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个根,

$$\therefore a+b = 2, ab = -1,$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1 = \frac{a^2 + b^2}{ab} + 1 = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} + 1 = -5.$$

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

60. ★★★

若 $ab \neq 1$ ，且 $5a^2 + 2001a + 9 = 0$ ， $9b^2 + 2001b + 5 = 0$ ，则 $\frac{ab+a+1}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（填小数形式）

【答案】 -398.4

【解析】 由 $9b^2 + 2001b + 5 = 0$ 得， $5\frac{1}{b^2} + 2001\frac{1}{b} + 9 = 0$ ，又 $5a^2 + 2001a + 9 = 0$ ，

所以 $a, \frac{1}{b}$ 可以看作是方程 $5x^2 + 2001x + 9 = 0$ 的两个根。

由韦达定理，得： $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{9}{5}$ ， $a + \frac{1}{b} = -\frac{2001}{5}$ ；

故 $\frac{ab+a+1}{b} = -\frac{1992}{5} = -398.4$ 。

故答案为：-398.4。

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

61. ★★★

已知 $2m^2 - 5m - 1 = 0$ ， $\frac{1}{n^2} + \frac{5}{n} - 2 = 0$ ，且 $m \neq n$ ，求 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的值。

【答案】 -5。

【解析】 方法一：由 $2m^2 - 5m - 1 = 0$ 可知， $m \neq 0$ ，故 $2 - \frac{5}{m} - \frac{1}{m^2} = 0$ ，即

$$\frac{1}{m^2} + \frac{5}{m} - 2 = 0$$

又 $\frac{1}{n^2} + \frac{5}{n} - 2 = 0$ ， $m \neq n$ ，故 $\frac{1}{m}$ 、 $\frac{1}{n}$ 是方程 $x^2 + 5x - 2 = 0$ 的两根

由根系关系可知， $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = -5$ 。

方法二：由题意可得： $2n^2 - 5n - 1 = 0$ ，故 m 、 n 可以看成是方程 $2x^2 - 5x - 1 = 0$ 的两实根，

$$\text{则 } m+n = \frac{5}{2}, mn = -\frac{1}{2},$$

$$\text{故 } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn} = -5,$$

所以 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的值为 -5。

故答案为：-5。

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

练习18

62. ★★

已知实数 x_1 、 x_2 满足 $x_1 + x_2 = 11$ ， $x_1 x_2 = 30$ ，则以 x_1 、 x_2 为根的一元二次方程是（ ）。

A. $x^2 - 11x + 30 = 0$ B. $x^2 + 11x + 30 = 0$ C. $x^2 + 11x - 30 = 0$ D. $x^2 - 11x - 30 = 0$

【答案】 A

【解析】 略 .

【标注】 【知识点】 利用构造的方程求解

63. ★★★

已知 x, y 均为实数, 且满足 $xy + x + y = 17$, $x^2y + xy^2 = 66$. 求 $x^2 + y^2$ 的值 .

【答案】 109 .

【解析】 已知 $xy + x + y = 17$, $x^2y + xy^2 = 66$,

所以 xy 和 $x + y$ 是方程 $t^2 - 17t + 66 = 0$ ① 的两个实数根 .

解方程①得 $t_1 = 6$, $t_2 = 11$.

即 $xy = 6$, $x + y = 11$; 或者 $xy = 11$, $x + y = 6$.

当 $xy = 6$, $x + y = 11$ 时, 则 x, y 是方程 $u^2 - 11u + 6 = 0$ ② 的两个根 .

因为 $\Delta_1 = (-11)^2 - 4 \times 6 > 0$, 所以方程②有实数根 .

这时 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 11^2 - 2 \times 6 = 121 - 12 = 109$.

当 $xy = 11$, $x + y = 6$ 时, x, y 是方程 $v^2 - 6v + 11 = 0$ ③ 的两个根 .

因为 $\Delta_2 = (-6)^2 - 4 \times 11 < 0$, 所以方程③没有实数根 .

综上所述 $x^2 + y^2 = 109$.

【标注】 【知识点】 利用构造的方程求解

64. ★★★★★

实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 3$, 求 z 的最大值 .

【答案】 $\frac{13}{3}$.

【解析】 由题知 $x + y = 5 - z$, $xy = 3 - z(x + y) = z^2 - 5z + 3$. 故 x, y 为关于 t 的一元二次方程 $t^2 - (5 - z)t + z^2 - 5z + 3 = 0$ 的两实根 . 故 $\Delta = (5 - z)^2 - 4(z^2 - 5z + 3) \geq 0$.

所以 $3z^2 - 10z - 13 \leq 0$, 即 $(3z - 13)(z + 1) \leq 0$, 所以 $-1 \leq z \leq \frac{13}{3}$.

当 $x = y = \frac{1}{3}$ 时, $z = \frac{13}{3}$.

故 z 的最大值为 $\frac{13}{3}$.

【标注】 【知识点】 利用构造的方程求解